

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 621.37

С.Г. Алексеев

МЕТОД РАСЧЕТА ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КАТУШЕК И РЕГУЛЯРНЫХ СЕТОК ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДНИКОВ С ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ ПО ЗНАКУ ТОКАМИ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Предлагаются формулы для расчета взаимной индуктивности регулярных сеток из параллельных последовательно соединенных встречно включенных линейных проводников и коротких цилиндрических катушек индуктивности, ориентированных осями ортогонально плоскостям размещения упомянутых сеток.

Введение

Взаимная индуктивность относится к числу основных параметров электрических цепей. Поэтому ее определение является одной из задач, возникающих в процессе инженерных расчетов цепей и исследования происходящих в них физических процессов. Понятие взаимной индуктивности тесно связано с понятием потокоцепления

$$\Phi = \int_{\bar{S}} \bar{B} d\bar{S}, \quad (1)$$

или просто потока вектора \bar{B} магнитной индукции магнитного поля одного из контуров через ориентированную поверхность \bar{S} , ограниченную другим проводящим контуром. Строго говоря, понятие взаимной индукции имеет физический смысл только для замкнутых контуров. Для расчетов взаимной индуктивности незамкнутых контуров используют условное понятие взаимной индуктивности, которое не противоречит здравому смыслу [1].

Расчету взаимной индуктивности посвящено множество публикаций в специализированных методических изданиях, многочисленная справочная литература, материалы солидных монографий и учебников. В одних случаях приводятся строгие аналитические результаты. Там, где этого сделать не удастся, обращаются к численным методам. И в том и в другом случаях геометрически сложные реальные контуры проводников подвергают декомпозиции на элементарные взаимодействующие пары простейшей геометрической конфигурации (пару бесконечно тонких линейных проводников, пару «линейный проводник – кольцевой контур» и т. п.). Встречаются примеры расчета электрических цепей в виде регулярных сеток линейных проводников с токами, взаимодействующих с другими подобными сетками либо с цилиндрическими катушками. Совокупная напряженность магнитного поля таких сеток представляется степенными рядами, подлежащими почленному интегрированию при определении потока вектора магнитной индукции [2].

Отдельное место занимает работа [3]. В ней автор подвергает анализу одну из координатных составляющих совокупного вектора напряженности магнитного поля, создаваемого регулярными сетками из бесконечного числа параллельных, уложенных в одной плоскости линейных бесконечно протяженных проводников с чередующимися от проводника к проводнику направлениями единичного тока возбуждения. По своей конфигурации реальные сетки такого вида состоят из наборов параллельных достаточно длинных последовательно включенных проводников и напоминают форму графика двоично-квантованной синусоиды с одинаковыми по длительности полупериодами Δ единичных положительных и единичных отрицательных значений (меандр). Используем некоторые результаты упомянутой работы.

1. Расчетные формулы: вывод, основные свойства

Будем полагать, что все проводники взаимодействующих контуров выполнены из немагнитного материала и находятся в немагнитной среде (например, в воздухе), магнитная проницаемость среды не зависит от напряженности магнитного поля и равна магнитной постоянной μ_0 , а токи, циркулирующие в проводниках, будем считать в любой момент времени одинаковыми во всех сечениях каждого контура (т. е. когда поле в среде, окружающей контуры, квазистационарное). В таком случае взаимная индуктивность контуров зависит только от их геометрии и взаимного расположения:

$$M \equiv \Phi = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\bar{S}} \bar{H} d\bar{S} = \iint_{S_{yz}} H_x dydz + \iint_{S_{xz}} H_y dx dz + \iint_{S_{xy}} H_z dx dy, \quad (2)$$

где $\bar{H}(x, y, z) = H_x \bar{e}_x + H_y \bar{e}_y + H_z \bar{e}_z$ – вектор напряженности магнитного поля тока I в одном из контуров в текущей точке пространства с координатами (x, y, z) ; H_x, H_y и H_z – координатные составляющие вектора \bar{H} ; $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ – орты координатной системы $Oxyz$.

Выполним преобразование масштабирования всех линейных размеров по следующим формулам [2]:

$$\Delta_1 = \Delta \left(\frac{\pi}{\Delta} \right) = \pi; \quad y_1 = y \frac{\pi}{\Delta}; \quad r_1 = r \frac{\pi}{\Delta}; \quad h_1 = h \frac{\pi}{\Delta}. \quad (3)$$

Будем считать расстояния между соседними проводниками сетки равными π и сохраним использование исходных обозначений линейных величин y, r, h . При сделанных предположениях взаимная индуктивность сетки и кольцевого контура с учетом (2) может быть вычислена по формуле

$$M_{\sin} = \frac{-\mu_0}{4\pi} \int_{y_0-r}^{y_0+r} H_z(y, h) \frac{\sqrt{r^2 - (y-y_0)^2}}{\sqrt{r^2 - (y-y_0)^2}} dy. \quad (4)$$

Здесь $H_z(y, r, h)$ – результирующая вертикальная составляющая вектора \bar{H} напряженности магнитного поля сетки с единичным током возбуждения:

$$H_z = H_z(y, h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{y - n\pi}{(y - n\pi)^2 + h^2} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{n - x}{(n - x)^2 + a^2}, \quad (5)$$

где $x = \frac{y}{\pi}$; $a = \frac{h}{\pi}$.

В работе [4] доказано, что ряд

$$P(x, a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{n - x}{(n - x)^2 + a^2} \quad (6)$$

равномерно сходится. Его сумма

$$S(x, a) = 2\pi \operatorname{ch}(\pi a) \frac{\sin(\pi x)}{\operatorname{ch}(2\pi a) - \cos(2\pi x)}. \quad (7)$$

Это основной результат работ [3, 4], в которых суммы вида (7) использованы для оптимального синтеза координатных составляющих H_z , сколь угодно точно приближающихся по форме к

синусоидам. К сожалению, выхода на формулы для взаимной индуктивности в [3, 4] не последовало. В настоящей статье предпринята попытка распространения возможностей суммы (7) на решение и этой задачи.

Перепишем формулу (7) с учетом (3):

$$S(x, a) = S(y, h) = 2 \operatorname{ch}(h) \frac{\sin(y)}{\operatorname{ch}(2h) - \cos(2y)}. \quad (8)$$

Преобразуем дробно-рациональную функцию под знаком суммы (8) следующим образом:

$$\frac{\sin(y)}{\operatorname{ch}(2h) - \cos(2y)} = \frac{\sin(y)}{2 \operatorname{ch}^2(h) - 1 - (\cos^2(y) - \sin^2(y))} = \frac{1}{2} \frac{\sin(y)}{\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(y)}. \quad (9)$$

С учетом (9) получим

$$S(y, h) = \operatorname{ch}(h) \frac{\sin(y)}{\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(y)}. \quad (10)$$

Введем выражение (10) под знак интеграла (4) и выполним интегрирование:

$$\begin{aligned} M_{\sin}(y_0, r, h) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{ch}(h) \int_{y_0-r}^{y_0+r} \frac{\sin(y)}{\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(y)} \int_{-\sqrt{r^2-(y-y_0)^2}}^{\sqrt{r^2-(y-y_0)^2}} dx dy = \\ &= -2 \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{ch}(h) \int_{y_0-r}^{y_0+r} \frac{\sqrt{r^2-(y-y_0)^2} \sin(y)}{\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(y)} dy. \end{aligned} \quad (11)$$

Опустим физическую константу $-\frac{\mu_0}{4\pi}$ и выполним замену переменной интегрирования:

$$y = y_0 + r \cos(t), \quad dy = d(y_0 + r \cos(t)). \quad \text{Здесь} \quad t_1 = \arccos\left(\frac{y_1 - y_0}{r}\right) = \arccos(-1) = \pi \quad \text{и} \\ t_2 = \arccos\left(\frac{y_2 - y_0}{r}\right) = \arccos(1) = 0 \quad \text{— новые пределы интегрирования.}$$

Получим

$$\begin{aligned} M_{\sin}(y_0, r, h) &= 2 \operatorname{ch}(h) \int_0^\pi \frac{r \sin(t) \sin(y_0 + r \cos(t))}{\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(y_0 + r \cos(t))} d(y_0 + r \cos(t)) = \\ &= 2 \operatorname{ch}(h) \int_0^\pi r^2 \sin^2(t) \frac{\sin(y_0 + r \cos(t))}{\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(y_0 + r \cos(t))} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Данный интеграл не выражается с помощью конечных комбинаций элементарных функций и при фиксированных Δ , r и h представляет собой непрерывную ограниченную периодическую функцию параметра y_0 .

Выполним оценку этого интеграла. Запишем неравенство

$$M_{\sin}(y_0, r_1, h) > M_{\sin}(y_0, r, h) > M_{\sin}(y_0, r_2, h), \quad (13)$$

где $2r_1 = 2r$ и $2r_2 = r\sqrt{2}$ – стороны квадратных рамок описанной и вписанной в кольцевой контур окружности радиуса r . Подобно интегралу (11) без учета физической константы $-\frac{\mu_0}{4\pi}$ имеем

$$M_{\sin}(y_0, r_i, h) = \text{ch}(h) \int_{y_0-r_i}^{y_0+r_i} \int_{-r_i}^{r_i} \frac{\sin(y)}{\text{ch}^2(h) - \cos^2(y)} dx dy = 2r_i \text{ch}(h) \int_{y_0-r_i}^{y_0+r_i} \frac{d(\cos(y))}{\text{ch}^2(h) - \cos^2(y)} dy, \quad i = \overline{1,2}. \quad (14)$$

Этот интеграл табличный [5]:

$$M_{\sin}(y_0, r_i, h) = r_i \ln \left| \frac{(\text{ch}(h) + \cos(y_0 - r_i))(\text{ch}(h) - \cos(y_0 + r_i))}{(\text{ch}(h) - \cos(y_0 - r_i))(\text{ch}(h) + \cos(y_0 + r_i))} \right|, \quad i = \overline{1,2}; \quad (15)$$

$$M_{\sin}(y_0, r_i, h) = 2(\text{arcth}(\frac{\cos(y_0 - r_i)}{\text{ch}(h)}) - \text{arcth}(\frac{\cos(y_0 + r_i)}{\text{ch}(h)})), \quad i = \overline{1,2}. \quad (16)$$

Раскроем в формуле (15) записи косинусов разностей и сумм углов. Эквивалентная формула будет иметь вид

$$M_{\sin}(y_0, r_i, h) = r_i \ln \left| \frac{(-\text{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r_i) - \sin(y_0) \sin(r_i))}{(\text{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r_i) - \sin(y_0) \sin(r_i))} \times \right. \\ \left. \times \frac{(\text{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r_i) + \sin(y_0) \sin(r_i))}{(-\text{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r_i) + \sin(y_0) \sin(r_i))} \right|, \quad i = \overline{1,2}. \quad (17)$$

Заменим в формулах (15)–(17) аргумент на $y_0 + \frac{\pi}{2}$. Такая замена эквивалентна сдвигу исходной регулярной «синусной» сетки в сторону отрицательных значений оси Oy на отрезок, равный $\frac{\pi}{2}$. Другими словами, в результате этой операции получена новая регулярная сетка, по форме отвечающая графику двоично-квантованной косинусоиды. Выражения для взаимной индуктивности квадратных рамок и полученной «косинусной» сетки следуют из (15)–(17):

$$M_{\cos}(y_0, r_i, h) = r \ln \left| \frac{(\text{ch}(h) - \sin(y_0 - r_i))(\text{ch}(h) + \sin(y_0 + r_i))}{(\text{ch}(h) + \sin(y_0 - r_i))(\text{ch}(h) - \sin(y_0 + r_i))} \right|, \quad i = \overline{1,2}; \quad (18)$$

$$M_{\cos}(y_0, r_i, h) = 2(\text{arcth}(\frac{\sin(y_0 + r_i)}{\text{ch}(h)}) - \text{arcth}(\frac{\cos(y_0 - r_i)}{\text{ch}(h)})), \quad i = \overline{1,2}; \quad (19)$$

$$M_{\cos}(y_0, r_i, h) = r_i \ln \left| \frac{(\text{ch}(h) - (\sin(y_0) \cos(r_i) - \cos(y_0) \sin(r_i)))}{(\text{ch}(h) + (\sin(y_0) \cos(r_i) - \cos(y_0) \sin(r_i)))} \times \right. \\ \left. \times \frac{(\text{ch}(h) + (\sin(y_0) \cos(r_i) + \cos(y_0) \sin(r_i)))}{(\text{ch}(h) - (\sin(y_0) \cos(r_i) + \cos(y_0) \sin(r_i)))} \right|, \quad i = \overline{1,2}. \quad (20)$$

Таким образом, получены по четыре эквивалентные формулы для взаимной индуктивности упрощенных моделей синусной и косинусной регулярных сеток и кольцевого индукционного контура: в виде интегралов (11), (12) и формул (15)–(20) для их оценок. При выводе формул использовано преобразование масштабирования линейных размеров. Поэтому результаты

вычислений по данным формулам получаются в радианах. При необходимости перехода к метрическим единицам следует выполнить обратное по отношению к (3) преобразование.

Исследуем некоторые свойства функций (15)–(17) и (18)–(20), полагая для упрощения $r_1 = r_2 = r$. На примере (15) покажем, что $M_{\sin}(y_0, r, h) = -M_{\sin}(-y_0, r, h)$:

$$\begin{aligned} -M_{\sin}(-y_0, r, h) &= -r \ln \left| \frac{(\operatorname{ch}(h) + \cos(-y_0 - r))(\operatorname{ch}(h) - \cos(-y_0 + r))}{(\operatorname{ch}(h) - \cos(-y_0 - r))(\operatorname{ch}(h) + \cos(-y_0 + r))} \right| = \\ &= r \ln \left| \frac{(\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0 - r))(\operatorname{ch}(h) - \cos(y_0 + r))}{(\operatorname{ch}(h) - \cos(y_0 - r))(\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0 + r))} \right| = M_{\sin}(y_0, r, h). \end{aligned} \quad (21)$$

По аналогии из (18) для $M_{\cos}(y_0, r, h)$ получим

$$\begin{aligned} M_{\cos}(-y_0, r, h) &= r \ln \left| \frac{(\operatorname{ch}(h) - \sin(-y_0 - r))(\operatorname{ch}(h) + \sin(-y_0 + r))}{(\operatorname{ch}(h) + \sin(-y_0 - r))(\operatorname{ch}(h) - \sin(-y_0 + r))} \right| = \\ &= r \ln \left| \frac{(\operatorname{ch}(h) - \sin(y_0 - r))(\operatorname{ch}(h) + \sin(y_0 + r))}{(\operatorname{ch}(h) + \sin(y_0 - r))(\operatorname{ch}(h) - \sin(y_0 + r))} \right| = M_{\cos}(y_0, r, h). \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, M_{\sin} – нечетная, M_{\cos} – четная функции параметра y_0 .

Определим нули $M_{\sin}(y_0, r, h)$ и $M_{\cos}(y_0, r, h)$. Приравняем выражение для $M_{\sin}(y_0, r, h)$, записанное формулой (17), к нулю и вместо правой части этой формулы в соответствии со свойствами логарифмической функции ($\ln|\pm 1| = 0$) воспользуемся эквивалентной записью:

$$\left| \frac{(-\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r) - \sin(y_0) \sin(r))(\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r) + \sin(y_0) \sin(r))}{(\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r) - \sin(y_0) \sin(r))(-\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r) + \sin(y_0) \sin(r))} \right| = 1. \quad (23)$$

После ряда упрощений и опуская промежуточные выкладки получим

$$\sin(y_0) = 0. \quad (24)$$

Отсюда

$$M_{\sin}(y_0, r, h) = 0 \text{ при } y_0 = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (25)$$

По аналогии

$$M_{\cos}(y_0, r, h) = 0 \text{ при } y_0 = (2k - 1) \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (26)$$

Определим стационарные точки амплитудно-координатных характеристик $M_{\sin}(y_0, r, h)$ и $M_{\cos}(y_0, r, h)$. В этих точках производные $\frac{d}{dy_0} M_{\sin}(y_0, r, h)$ и $\frac{d}{dy_0} M_{\cos}(y_0, r, h)$ обращаются в нуль. Выполним дифференцирование на примере $M_{\sin}(y_0, r, h)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy_0} M_{\sin}(y_0, r, h) &= \frac{d}{dy_0} r \ln \left| \frac{(-\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r) - \sin(y_0) \sin(r))}{(\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r) - \sin(y_0) \sin(r))} \right| \times \\ &\times \frac{(\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r) + \sin(y_0) \sin(r))}{(-\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r) + \sin(y_0) \sin(r))}. \end{aligned} \quad (27)$$

Приравняем результат дифференцирования к нулю, опуская промежуточные выкладки и возвращаясь к r_1 (т. е. r_1 и r_2), получим

Отсюда $\cos(y_0) = 0$ или $(\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(r_i) - 1 + \cos^2(y_0)) = 0$. Множество стационарных точек $M_{\sin}(y_0, r, h)$ составляют точки $y_{0,k} = \pm(2k-1)\frac{\pi}{2}$ и $y_0 = \arccos(\pm\sqrt{1 + \cos^2(r_i) - \operatorname{ch}^2(h)}) \pm k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В первом случае

$$M_{\sin \text{ экстр.}} = 2r_i \ln \left| \frac{\operatorname{ch}(h) + \sin(r_i)}{\operatorname{ch}(h) - \sin(r_i)} \right|, \quad (29)$$

во втором

$$M_{\sin \text{ экстр.}} = r_i \ln \left| \frac{(\operatorname{ch}(h) + \cos(\arccos(\pm\sqrt{1 - \operatorname{ch}^2(h) + \cos^2(r_i)} - r_i)))}{(\operatorname{ch}(h) - \cos(\arccos(\pm\sqrt{1 - \operatorname{ch}^2(h) + \cos^2(r_i)} - r_i)))} \times \right. \\ \left. \times \frac{(\operatorname{ch}(h) - \cos(\arccos(\pm\sqrt{1 - \operatorname{ch}^2(h) + \cos^2(r_i)} + r_i)))}{(\operatorname{ch}(h) + \cos(\arccos(\pm\sqrt{1 - \operatorname{ch}^2(h) + \cos^2(r_i)} + r_i)))} \right|, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (30)$$

По аналогии с выкладками по нахождению стационарных точек $M_{\sin}(y_0, r_i, h)$ для функции $M_{\cos}(y_0, r_i, h)$ получим

$$\sin(y_0)(\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(r_i) - \cos^2(y_0)) = 0, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (31)$$

Множество стационарных точек $M_{\cos}(y_0, r_i, h)$ составляют точки $y_{0,k} = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $y_0 = \arccos(\pm\sqrt{\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(r_i)}) \pm k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$M_{\cos \text{ экстр.}} = 2r_i \ln \left| \frac{\operatorname{ch}(h) - \sin(r_i)}{\operatorname{ch}(h) + \sin(r_i)} \right|; \quad (32)$$

$$M_{\cos \text{ экстр.}} = r_i \ln \left| \frac{(\operatorname{ch}(h) - \sin(\arccos(\pm\sqrt{\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(r_i)} - r_i)))}{(\operatorname{ch}(h) - \sin(\arccos(\pm\sqrt{\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(r_i)} - r_i)))} \times \right. \\ \left. \times \frac{(\operatorname{ch}(h) - \cos(\arccos(\pm\sqrt{\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(r_i)} + r_i)))}{(\operatorname{ch}(h) + \cos(\arccos(\pm\sqrt{\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(r_i)} + r_i)))} \right|, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (33)$$

Из-за взаимной параллельности (ортогональности) проводников рамок и сеток оценки по полученным для M_{\sin} и M_{\cos} формулам могут существенно отличаться от истинных значений, полученных интегрированием точной формулы (11). В то же время другие варианты оценок, например, когда эти же рамки развернуты в своей плоскости вокруг центра (x_0, y_0, h) на некоторый угол, не кратный $\frac{\pi}{2}$, приводят к «неберущимся» интегралам. Поэтому рассмотрим следующую аппроксимацию.

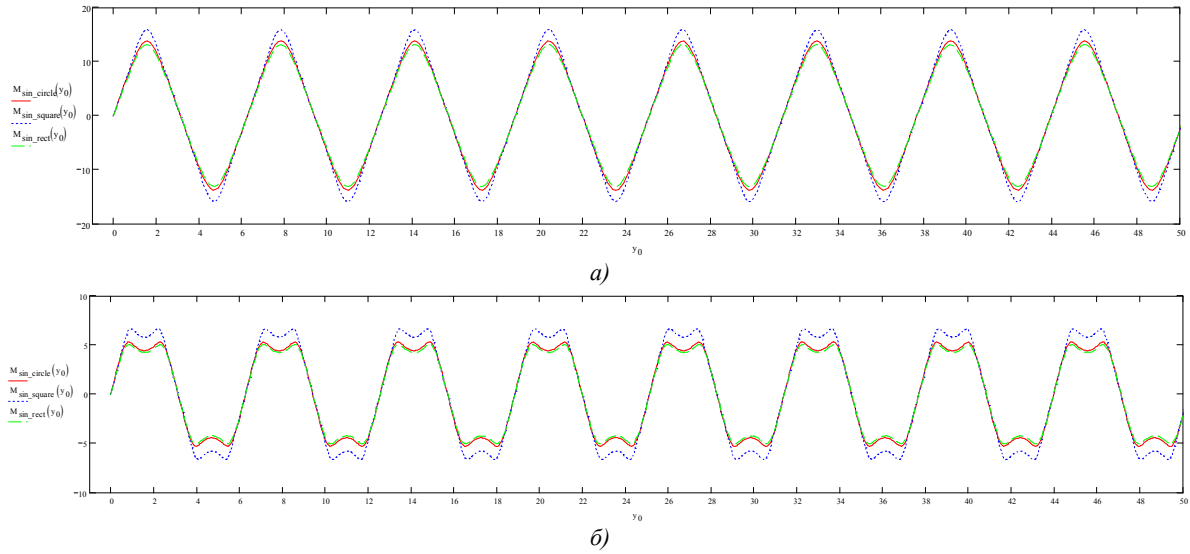
Разобьем оба полукруга радиуса r области интегрирования интеграла (14) на N (для упрощения одинаковых) секторов с углами $\alpha = \frac{\pi}{N}$. Разбиение делит границы области интегрирования на $2N$ дуг: по N дуг на каждую границу. Соединим одноименные концы одноименных дуг хордами, параллельными оси Oy . Построим на хордах N прямоугольных площадок с координатами вершин i -й площадки: $x_{i-1} = r \cos((i-1)\alpha)$, $x_i = r \cos(i\alpha)$, $\pm y_i = y_0 \pm r \sin(i\alpha)$, $i = \overline{1, N}$. С учетом данного построения интеграл (14) приобретает вид

$$\begin{aligned}
M_{\sin}(y_0, r, h, \alpha) &= \sum_{i=1}^N \operatorname{ch}(h) \int_{y_0 - r \sin(i\alpha)}^{y_0 + r \sin(i\alpha)} \frac{\sin(y)}{\operatorname{ch}^2(h) - \cos^2(y)} dy \int_{r \cos((i-1)\alpha)}^{r \cos(i\alpha)} dx = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (r \cos(i\alpha) - r \cos((i-1)\alpha)) \ln \left| \frac{(-\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r \sin(i\alpha)) - \sin(y_0) \sin(r \sin(i\alpha)))}{(\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r \sin(i\alpha)) - \sin(y_0) \sin(r \sin(i\alpha)))} \times \right. \\
&\quad \times \left. \frac{(\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r \sin(i\alpha)) + \sin(y_0) \sin(r \sin(i\alpha)))}{(-\operatorname{ch}(h) + \cos(y_0) \cos(r \sin(i\alpha)) + \sin(y_0) \sin(r \sin(i\alpha)))} \right|, \alpha = \frac{\pi}{N}, N < \infty.
\end{aligned} \quad (34)$$

По аналогии

$$\begin{aligned}
M_{\cos}(y_0, r, h, \alpha) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (r \cos(i\alpha) - r \cos((i-1)\alpha)) \times \\
&\times \ln \left| \frac{(-\operatorname{ch}(h) - \sin(y_0) \cos(r \sin(i\alpha)) - \cos(y_0) \sin(r \sin(i\alpha)))}{(\operatorname{ch}(h) - \sin(y_0) \cos(r \sin(i\alpha)) - \cos(y_0) \sin(r \sin(i\alpha)))} \times \right. \\
&\times \left. \frac{(\operatorname{ch}(h) - \sin(y_0) \cos(r \sin(i\alpha)) + \cos(y_0) \sin(r \sin(i\alpha)))}{(-\operatorname{ch}(h) - \sin(y_0) \cos(r \sin(i\alpha)) + \cos(y_0) \sin(r \sin(i\alpha)))} \right|, \alpha = \frac{\pi}{N}, N < \infty.
\end{aligned} \quad (35)$$

На рисунке представлены графики взаимной индуктивности $M_{\sin}(y_0, r, h)$ рассматриваемых контуров, рассчитанные для двух различных значений шагов Δ укладки проводников синусной сетки.



Графики взаимной индуктивности синусной сетки и кольцевого контура фиксированного радиуса r , рассчитанные для различных Δ по формулам (12) – красный цвет, (15) – синий цвет и (32) – зеленый цвет: а) $\Delta_1 = 25,6$ мм; б) $\Delta_2 = 51,2$ мм;

Из графиков видно, что M_{\sin} , а следовательно, и M_{\cos} являются 2π -периодическими непрерывными ограниченными функциями, которые при малых Δ , сравнимых со значениями радиуса r , приближаются по форме к синусоидальным. С возрастанием Δ практически синусоидальная форма графиков переходит в форму, подобную синусоиде с плоскими участками в окрестностях экстремумов (на графике не показана), и 2π -периодическую функцию с четырьмя глобальными и двумя локальными экстремумами.

Относительная погрешность представления интеграла (12) суммой (34) для некоторых наборов значений параметров r и Δ при $h = 5$ мм составила: для $N = 8 \approx 2,75\%$; для $N = 10$

$\approx 1,5\%$; $N = 15 \approx 0,7\%$; $N = 100 \approx 0,016\%$. Время вычисления M_{\sin} и M_{\cos} по формулам (34) и (35) для одного конкретного набора параметров составляет менее 1 с на ПЭВМ с процессором Intel Pentium 1600 MHz.

2. Взаимная индуктивность многовитковых цилиндрических катушек и регулярных сеток параллельных проводников

Полученные выше формулы для вычисления взаимной индуктивности кольцевого контура и регулярных сеток из бесконечного множества последовательно соединенных линейных и бесконечно протяженных проводников с чередующимися направлениями тока возбуждения достаточно просты для вычислений на компьютере, поскольку содержат однократные интегралы или конечные наборы элементарных функций. Вместе с тем кольцевой контур лишь отдаленно представляет реальные многовитковые и многослойные цилиндрические катушки индуктивности. Поэтому при переходе от оценочных расчетов к инженерному проектированию целесообразно обращение к более сложным конструкциям, например в виде коротких многослойных катушек, составленных из нескольких вложенных слоев намотки. При таком подходе нет необходимости в дополнительных операциях интегрирования. Достаточно выполнить переход к многократному суммированию слагаемых вида (15)–(17) и (18)–(20) по числу $j = \overline{1, J}$ слоев и числу $p = \overline{1, P}$ контуров в слое. Так, взамен формул (17) и (20) после ряда таких преобразований получим

$$M_{\sin}(y_0, h_p, r_j) = \sum_j \sum_p \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (r_j \cos(i\alpha) - r_j \cos((i-1)\alpha)) \times \\ \times \ln \left| \frac{-(ch^2(h_p) + 2ch(h_p) \sin(y_0) \sin(r_j \sin(i\alpha))) + 1 - \cos^2(r_j \sin(i\alpha)) - \cos^2(y_0))}{-ch^2(h_p) + 2ch(h_p) \sin(y_0) \sin(r_j \sin(i\alpha)) - 1 + \cos^2(r_j \sin(i\alpha)) + \cos^2(y_0)} \right|, \quad (36)$$

$$M_{\cos}(y_0, h, r_j) = \sum_j \sum_p \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (r_j \cos(i\alpha) - r_j \cos((i-1)\alpha)) \times \\ \times \ln \left| \frac{-ch^2(h_p) - 2ch(h_p) \cos(y_0) \sin(r_j \sin(i\alpha)) + \cos^2(r_j \sin(i\alpha)) - \cos^2(y_0)}{-ch^2(h_p) + 2ch(h_p) \cos(y_0) \sin(r_j \sin(i\alpha)) + \cos^2(r_j \sin(i\alpha)) - \cos^2(y_0)} \right|, \quad (37)$$

где r_j – радиус j -го контура, h_p – высота j -го контура над плоскостью размещения сеток.

В [4] получены частичные суммы рядов, составленные из конечного набора членов и отвечающие случаям регулярных сеток с конечным числом линейных проводников. Частичные суммы отличаются от (7) наличием дополнительных слагаемых из дробно-рациональных функций нечетных степеней. Интегрирование дополнительных слагаемых приводит к табличным интегралам и в настоящей работе не рассматривается.

Заключение

В статье разработаны математические модели для расчета взаимной индуктивности сложных контуров. Одни из этих контуров представляют собой регулярные сетки, скомпонованные на плоскости из множества параллельных последовательно соединенных линейных проводников. Другие представлены короткими цилиндрическими катушками индуктивности, условно набранными из кольцевых контуров. Дополнительно введены следующие ограничения: все проводники сеток имеют бесконечную длину и «нулевое» поперечное сечение (математические нити). Названные ограничения сужают круг решаемых задач. Тем не менее, когда нет необходимости исследования краевых эффектов в периферийных зонах сеток, положитель-

ные результаты оценочных расчетов гарантированы. То же самое можно утверждать касательно практически эквивалентной замены винтовой структуры катушек индуктивности набором соосных контуров. Ошибка такой замены при малых значениях шага винтовой структуры для коротких катушек не существенна для инженерных расчетов, но гарантирует уход от дополнительной операции численного интегрирования, если замены не делать.

Предложенный подход к расчету взаимной индуктивности распространяется на реальные конструкции индукционных систем с любым числом регулярных сеток, в том числе сеток с различными от сетки к сетке шагами укладки проводников и разными по модулю токами возбуждения каждой сетки.

Разработанные модели взаимной индуктивности в своем классе превосходят известные автору аналоги, основанные на разложениях координатных составляющих вектора напряженности магнитного поля в ряды (см., например, [2]), по широте области применения, конечному числу слагаемых формул для оценок, большому числу эквивалентных соотношений, относительной простоте и скорости просчета вариантов (в течение нескольких секунд), доступности специалистам со средним и высшим техническим образованием, владеющим навыками интегрирования и вычисления конечных комбинаций элементарных функций.

Список литературы

1. Калантаров, П.Л. Расчет индуктивностей. Справочная книга / П.Л. Калантаров, Л.А. Цейтлин; 3-е изд. – Л. : Энергоатомиздат, 1986. – 488 с.
2. Алексеев, Г.И. Расчет и оптимизация индукционной системы дигитайзера на упрощенной модели / Г.И. Алексеев, Е.Ю. Васильев, В.А. Мильман // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2001. – № 3. – С. 110–115.
3. Гренов, А.И. Математическое моделирование и проектирование нониусных индукционных систем планшетных дигитайзеров: автореф. ... дис. канд. техн. наук: 05.13.01 / А.И. Гренов; НАН Беларусі, Ин-т. техн. кибернетики. – Минск, 1997. – 20 с.
4. Гренов, А.И. Суммирование функциональных рядов с помощью вычетов / А.И. Гренов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1993. – № 1. – С. 88–92.
5. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М. : Наука, 1966. – 228 с.

Поступила 27.02.09

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларусі,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: saa88@list.ru*

S.G. Alexeyev

THE METHOD OF CALCULATING MUTUAL INDUCTANCE OF COILS, REGULAR GRIDS OF CASCADE CONNECTIONS AND PARALLEL PLACED WIRES

Explicit formulas for calculating mutual inductance of regular grids and cylindrical inductive coils oriented by their axis of symmetry orthogonally to the grids disposition planes are proposed. The grids consist of parallel and opposite connected wires.